# EX UNIVERSA PHILOSOPHIA SELECTA CAPITA

QUAE

PUBLICA DISPUTATIONE

D. Aloisius Guida e Regio Ephebeo

SUSCIPIT

PROPUGNANDA ET EXPONENDA

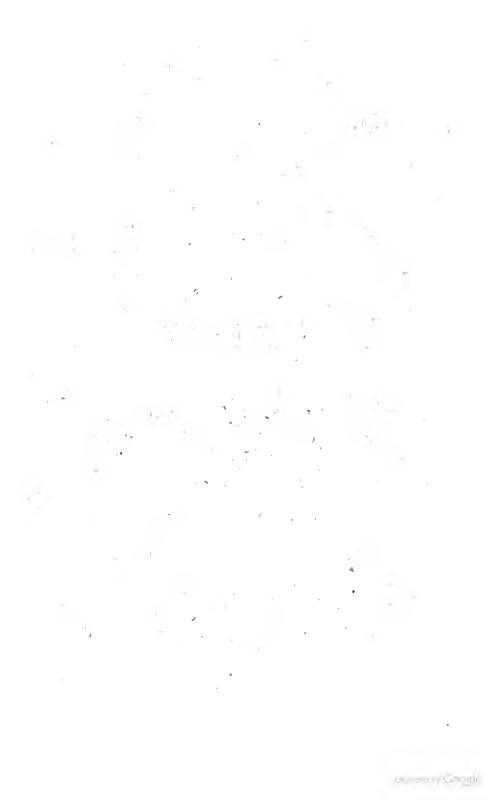
IN COLLEGIO LYCIENSI S. I.

XVI *Kalendas Octobres* MDCCCXLIV

MANE ET A PRANDIO

*Omnibus arguendi interrogandique copia siet*

BARII
Typis Fratrum Cannone.

# PHILOSOPHIA
# RATIONALIS

# METAPHYSICA

## LOGICA ET ONTOLOGIA

### I.

Media humanae naturae ad sapientiam comparandam proposita in sensibilibus facultatibus, intelligentia, ratiocinatione, conscientia, et auctoritate continentur, quorum veracitatem a sophistarum argutiis atque fallaciis plus aequo et saepius iniuria impetitam multimodis vindicamus.

### II.

Ratiocinatio institui nullo modo potest nisi admittantur quaedam veritates, quae per se pateant; ac proinde nulla indigeant demonstratione. Sed inter scientiarum principia seu axiomata eas tan-

tum veritates adcensemus, quae praeter immediatam evidentiam universalitatem etiam praeseferunt.

III.

Quae iudicia analytica audiunt, tamquam communi lege, contradictionis effato continentur; synthetica autem experientia vel observatione nituntur: ex his « futurum simile erit transacto » certitudinem metaphysicam, si abstracte, certitudinem physicam, si concrete perpendatur, praebere autumamus.

IV.

Interna rerum possibilitas non ab omnipotentia aut a voluntate Dei, sed ab eius natura et intellectu dependet; quare in absurda Dei non existentis hypothesi aliquid possibile fore omnino inficiamur.

V.

Etsi humanus intellectus essentias rerum, quae sunt, in seipsis intueri non possit; eum tamen ex variis atque diversis rerum operationibus et proprietatibus ad earum essentias reales investigandas tuto pertingere firmiter contendimus.

VI.

Notiones substantiae et causae veluti commentitias aut obscuras habere philosopho indignum:

earum altera non modificationum congerie, sed perceptione rei in se stantis constituitur; altera ex conceptu eventus seu mutationis cuiuslibet, quae in natura contingat, evidenter eruitur.

## VII.

Creaturas non esse meras occasiones, quarum intuitu Deus omnia peragat, sed vera activitate donari in compertis esse debet; unde rationi, conscientiae, communique sensui vehementer adversantur quotquot aut entia omnia aut corpora tantum ea facultate destitui demonstrare nituntur.

# COSMOLOGIA

## VIII.

Cognitionem humanam in sola phaenomenorum regione vagari, neque res ipsas attingere, quae experientiae subiiciuntur, inepta prorsus opinatio est; hinc transcendentales vulgaresque idealistas obiectivam mundi realitatem ad idearum tantum phaenomena traducentes omnigenis argumentis refellimus.

## IX.

Vehementer etiam desipiunt qui unicam prorsus adstruunt existere substantiam eamque absolutam, et infinitam, cuius veluti modificationes aut utcumque positiones variae sint ea omnia quae rerum

universitatem conflant. Contra eos mundum a Deo discriminari evidentissimum esse propugnamus.

## X.

Mundum eiusque materiam infectam non esse, sed ex suprema aliqua causa, quae rerum omnium contingentium seriem excedat, non emanatione prodiisse convincimur, sed creatione.

## XI.

Effectio igitur, qua aliquid producitur, non ut ab altero pars avulsa, neque ut ullo praesupposito subiecto conflatum adeo certa res est, ut non modo inter possibilia adcenseatur, sed etiam ipso eventu liquido comprobetur; quare inepta ducimus quae ad conceptum eius obscurandum oggerunt Rationalistae.

## XII.

Licet entia, quae in natura sunt, eorumque effectus constitutis legibus atque ordine pulchritudinem mundo tribuant in suo genere numeris omnibus absolutam; non inde tamen Ens omnium supremum agere aliquando non potest praeter aut supra rerum naturalium cursum ad sui dominatus voluntatisque manifestationem et decus.

## ANTHROPOLOGIA

### XIII.

Sentiendi actio, quae in factis quibusdam externis et concretis repraesentandis versatur, ab impressione obiectorum in sensoriis, fibrillarum cerebrique motu et corporis temperie secernenda est; qui vero eam cum cogitatione confunderet, maximum discrimen quod intellectum inter et sensum adest non agnosceret.

### XIV.

Idearum generalium existentia a iudicandi ratiocinandique actibus comprobatur: eas exculpimus cum neglectis notis in quibus individua differunt, aut eo elemento quo res singularis efficitur, notionem unam et simplicem efformamus, quae id quod generale est tantummodo colligat et repraesentet.

### XV.

Cum animus humanus nihil habeat admixtum nihil copulatum nihil duplex atque coagmentatum, itemque omnem dependentiam, ut existat, a materia respuat, simplicitate et spiritualitate procul dubio fruitur; porro ex iis praesertim, sempiterna in posterum duratio eius ceu consectarium ineluctabile liquido dimanat.

## XVI.

Quapropter originem ipsius animi quod attinet, is neque a parentibus per traducem, neque a divina substantia per emanationem derivari potest; sed ab efficacitate absoluta supremae causae, cum corpus coniunctioni eius idoneum evaserit, ex nihilo educi certissimum est.

## XVII.

Est animis nostris in bonum nullo limite definitum et in media cum eo necessario connexa insita naturalis tendentia; eadem tamen circa reliqua bona contingentia liberi arbitrii activa facultate donatur, qua indifferenter velle aut respuere pro lubito ea possit.

# THEOLOGIA NATURALIS

## XVIII.

Dei existentiam, quae aliunde ex primis humanae intelligentiae et experientiae principiis facili admodum pacto deducitur, adversus vaferrimam atheorum impudentiam pluribus vindicamus: quia autem aut unus aut nullus Deus est, dualismum et polytheismum inter insanias amandamus.

## XIX

Desipiunt pariter quotquot mundanarum re-

rum sapientissimam providentiam Deo abnegant, quae hujusmodi est ut de individuis infimisque etiam naturis curam gerat easque administret, omnibus et singulis assidue prospiciens.

## DE RELIGIONE

### XX.

Sed divina providentia hominem ad ipsius individui bonum dirigere ea ratione debet, quae consentanea sit etiam libertati eius naturali. Id autem lege perficitur (naturali), cuius est praecipue hominem in ipsum Deum ordinare, ut ei facultatibus suis adhaereat.

### XXI.

Itaque homo lege tenetur praestare cultum supremae omnium Causae. Verum naturalis Religio omnibus officiis moribusque decernendis multiplici deficit ratione, et impar est, ut experientia potissimum constat, mediis iis praestandis quae cuique homini sufficiant, ut in suum verum finem certe et efficaciter contendat pervenire.

### XXII.

Quare necessaria est homini (saltem moraliter) earum veritatum manifestatio quibus se moresque suos dirigat, Deumque colat: hanc, quam revelationem supernaturalem dicimus, non modo possibilem esse, sed in IESU CHRISTI religione iamdiu existentem contra Rationalistas omnes demonstramus, vehementissimeque defendimus.

# IUS NATURAE

## IUS INDIVIDUALE

*Operandi normae*

I.

Cum creaturae omnes a sapientissimo universi artifice propensione quadam naturali instructae sint ut in finem ipsis praestitutum dirigantur, facultatibus inspectis quibus natura quaelibet comparatur, verum bonum quod beatitatem eius progignit determinari posse contendimus.

II.

Hinc humanae naturae capacitatem nonnisi summo infinitoque bono (Deo) expleri posse li-

quido intelligentibus apparet ; quare in huius vitae decursu omnium beatissimus non ille putandus est in quo summa delectabilium momentorum summam tristium superet ; sed is qui in summi boni adeptionem rectae voluntatis actibus innisus, spem animo venturae felicitatis capiat suavissimam.

## III.

Mens porro humana , utpote quae natura sua ad verum capessendum feratur, illud contemplans, mediaque necessaria ultimo fini obtinendo investigans, conditoris sui consilia detegit , hisque uniformia dictamina ac officia voluntati adimplenda obiicit, praevio principio quod inter moralia primum habemus « Fac bonum ».

## IV.

Unde naturalis quaedam est lex a qua vivendi doctrina educitur iubens ea quae natura sua bona sunt prohibensque contraria; eam dicimus manifestationem divinae sapientiae et voluntatis quae ad suos fines omnia dirigens, regulas quasdam necessarias rationali creaturae servandas proponit, caeterarumque obligationum et legum fons et fundamentum existit

## V.

In suis autem actibus eliciendis tribus elementis adiuvatur voluntas humana; ratione scilicet,

cuius dictamini sese componat necesse est; animi motibus, qui, si ut fas est adhibeantur, efficacitatem operationibus conciliant; habitibus denique qui faciliorem operandi rationem efficiant. At enim illa, utpote libertate praedita, creatoris legibus vel obsequi vel refragari potest; ex quo moralitas actionum enascitur, quae respectus est humanorum actuum in finem ipsis a Creatore propositum.

*Hominis officia erga Deum, et seipsum*

### VI.

Ad hominum officia quod attinet, principem locum habent quae ex dependentia qua Deo subiicimur ut a summo Esse, Vero, et Bono eruuntur: huiusmodi sunt adoratio cum interno externoque animi et corporis cultu; fides qua mens divinae auctoritati revelanti adhaerescit; amor quo voluntas in Deum ut suum terminum inclinatur. Hinc summae impietatis arguimus quotquot vel cultum externum abiiciunt, vel indifferentiam in religionis dogmatibus perditissime affectant.

### VII.

Nobismetipsis vero indictum est inordinatos passionum phantasiaeque motus moderari, ut mens veritatibus praesertim moralibus vacet, et voluntas rectae conscientiae normis liberius obsequatur, quae sunt propria hominis munia: iis autem totius physici humani compositi conservationem ad-

dendam esse illi tantum inter homines miserrimi negabunt, qui a deploranda quadam phrenesi turpiter exagitati, persuadere sibi vellent licitum esse sibimetipsi mortem consciscere.

## IUS SOCIALE

### *De societatum origine, et officiis erga alios*

VIII.

Societatem neque unice a pactione aliqua, neque simpliciter ab hominis essentia derivamus; sed ex duplici repetimus principio quorum alterum necessarium sit et ab humana natura dimanet, alterum contingens quod societatem ipsam factis quibusdam particularem efficiat et concretam: deducimus inde omnem hominem a natura ad societatem addictum.

IX.

Homines in societatem coeuntes iuribus adstringuntur quae ex ordine enata creaturas intelligentes coercere valent, modo a validioribus iuribus non elidantur. Hinc veracitati, publicae honestati, amori, obsequio, caeterisque officiis ad vitam et famam aliorum praestandis mutuo satisfaciendum est.

X.

Verum ea accidere possunt adiuncta, in qui-

bus iura unius ad vitam servandam, alterius tutandae vitae iura debilitent: quod si fiat, potest unusquisque cum moderamine inculpatae tutelae, ut inquiunt, iniusto aggressori mortem infligere: at vero singulare certamen seu duellum iuri naturae minime consentaneum esse propugnamus.

## XI.

Facta quae peculiares societates determinant vel a *natura* vel a *sociorum voluntate* vel ab *alterius iure praevalente* ponuntur; iis manentibus, iure naturae ad societatem in qua primitus coivimus alligamur. Non inde tamen factum constituens voluntariam societatem, chimaericam pacti socialis hypothesim ratam habet; nam in illa factum quod est elementum contingens societatis, aliud a natura emanans essentiale supponit elementum.

### *De auctoritate et operatione sociali*

## XII.

Societas sine suprema auctoritate coalescere non potest, quae si generatim et abstracte consideretur, a Deo tamquam a fonte totius ordinis immediate provenit: quod vero in peculiari quadam vel morali vel physica *persona* constituatur, mediate tantummodo a summo Numine ut rerum omnium arbitro dependet.

## XIII.

In hac vero auctoritate, quae cum herili dominatione confundenda non est, moralis operatio societatis residet, per quam ad externos civium actus directe moderandos incumbat; quare et physicis malis quae bono sociorum officere possent occurrere, et moralibus, criminibus nempe, ita adversari debet, ut in iis tum praeveniendis tum puniendis sedulo adlaboret.

## XIV.

Quoad ius delinquentes puniendi, longe sumus tam ab iis qui opinantur commissa iam scelera non esse punienda nisi periculum sit ne iterum perpetrentur, cum ab iis qui etiam si quando violatus ordo instaurandus expostulet, a supremis quibusdam infligendis paenis Principi abstinendum contenderunt. Insuper si noxia societati mens per verba vel facta vel typos prodeat, huiusmodi socialia delicta poenis etiam summis ab auctoritate coercenda esse propugnamus.

*De iuribus politicis*

## XV.

Iura politica constitutivum, deliberativum, legislativum, et executivum recensemus; quorum postremo iudiciaria potestas et vis publica addatur necesse est: verum iudicialis potestatis participes

a principe fieri possunt quotquot res, et tempus exigere videbuntur, ut in societate, profligatis criminibus, quantum fieri potest, iustitia praevaleat iuraque omnia ad moralis ordinis exigentiam publice redigantur.

XVI.

Leges, quae a suprema auctoritate competenti condi debent, si finem propter quem decernuntur, legislatorem, ac subditos quibus applicantur attendamus, iustae, utiles, convenientes, clarae publicae, et efficaces sint oportet; ex convenientiae conditione accidit ut non omnis lex aeque omni regioni indiscriminatim congruere possit; in quo eos deceptos existimamus, qui huiusmodi discrepantiam ab ipsius legis intrinseca honestate repetendam contenderunt.

*De iure inter-nationali*

XVII.

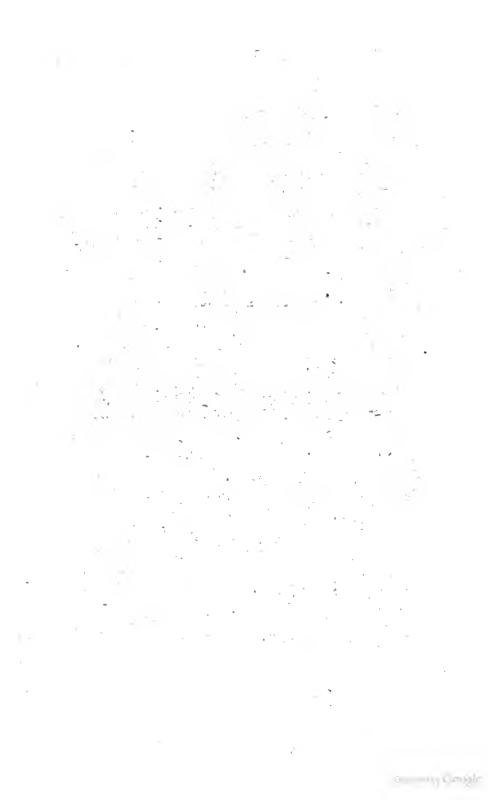
Societates quae statum constituunt, ac proinde sua pollent nationali independentia, ex iure naturae nihil moliri aut intendere debent pro suis sociis quo aliarum gentium iura laedantur; quare vicissim conandum est ipsis ut suum esse politicum servent, sociorum felicitati consulant, et, si nihil obstet et necessitas urgeat, ab iniustis aggressoribus se mutuo vindicent.

## XVIII.

Quod si inter huiusmodi nationes laesio iurium nonnisi vi reparari queat, et ad perturbati ordinis violentam defensionem bello dimicandum, hoc publicum justum efficax moderatum sit oportet: unde ad commune societatis bonum ab auctoritate indici debet, quae pacem aequis conditionibus oblatam ne respuat, inermibus clementiam adhibeat, caedes evitet, et dictamina moralia tecta sartaque tueri enitatur.

# FISICA

# E

# MATEMATICA

# FISICO-CHIMICA

## METEOROLOGIA

1. Alla meteorologia appartengono i fenomeni, che osservansi nell' atmosfera; però anzi ogni altra cosa verrà questa definita e se ne assegnano come principali costituenti il nitrogene, l' ossigene, il vapor acqueo, e l' acido carbonico. Questi per altro non sono tra loro chimicamente combinati ma debbono piuttosto riguardarsi come semplicemente misti, e secondo molte esperienze l' O: N=27: 73, o meglio = 21: 79, l'acido carbonico occupa circa 0,00049, ed il vapor acqueo 0, 0142 del volume dell'aria.

Ad esplorare la quantità d' ossigene esistente in un dato spazio si fa uso dell' eudiometro, tra quali il più perfetto pare quello a gas idrogene del Ch: Alessandro Volta.

2. Il peso specifico dell' aria atmosferica a O.°

e sotto l' ordinaria pressione barometrica è $\frac{1}{770}$ di quello dell' acqua o circa.

L' atmosfera non è indefinita, ma là è il suo termine dove la temperatura e l'elatere dell' aria si contrapesano colla gravità terrestre, e si deduce dai crepuscoli matutino e vespertino che l' aria densa tanto da riflettere sulla terra la luce solare s' innalza non più di 47, 000 metri.

Alla riflessione atmosferica si deve il colore azzurro del cielo, e l' essere illuminati i luoghi non esposti a' raggi del sole, o diretti o riflessi dai corpi terrestri; i due crepuscoli, tra' quali quello della sera più lungo di quello del mattino.

Del vapore acqueo è sempre misto all'aria atmosferica, ed al variar di questo miscuglio devesi tribuire il più o meno biancheggiar dell' azzurro del cielo, i vaghi colori del ciel dipinto dal sol cadente, il color rosso di rame della luna ecclissata, e l' aurato o roseo dell' aurora.

3. La colonna barometrica ha una doppia variazione l' una accidentale l' altra periodica. Spiegata la natura d' amendue, la prima si applica a conoscere le qualità del tempo; e se ne ripete l' origine dal variare il peso o la pressione dell' aria per le mutazioni di temperatura e ciò che da queste consegue, ma più dal soffiare dei venti. Della seconda non pare sia cagione adequata l' attrazione del sole e della luna. Che se questa v' influisce lo fa insieme con altre cagioni che valgono a variar costantemente in determinate ore, la pressione o l' altezza della colonna atmosferica.

4. Le cagioni che determinano la temperatura che si prova presso la superficie terrestre sono i raggi del sole e delle stelle, l'atmosfera ed il calore interno della terra. Si accennano i conseguenti di ciò, e come si trovi la temperatura media dell'anno del mese del giorno per un determinato luogo. La temperatura per altro decresce a mano a mano che c' innalziamo nell' atmosfera; e discendendo nell' interno della terra da circa un piede sotto la superficie la temperatura va continuamente crescendo.

5. I fenomeni che s' osservano nell' atmosfera, altri vengon prodotti da variazione di temperatura, altri dall' azion della luce, altri dalla elettricità. Tra i primi sono i venti che consistono in correnti d' aria più o meno veloci ed intense. Vengon queste cagionate dai cangiamenti del peso specifico e della elasticità dell' aria per cagioni che operano inegualmente nelle diverse parti dell' atmosfera, accorrendo però l' aria dal luogo ove ha maggior tensione a quello ove ne ha minore.

Le direzioni dei venti comechè varie e moltiplici assai, si riducono però ordinariamente a 32 principali secondo la nota divisione della così detta *rosa dei venti*. Essi si propagano per impulsione o per aspirazione e ve ne ha dei costanti o alisei e dei periodici, alcuni variabili altri mussoni o di stagione. Sopra tutti però sono nocivi e temuti quelli detti tifoni ed oragani. Gli stromenti ordinati a misurare la intensità e direzion dei venti diconsi anemometri ed anemoscopi dei quali darassi la descrizione.

6. Meteore umide o precipitazioni atmosferiche sono la rugiada la brina le nebbie le nuvole la pioggia e la neve. Della rugiada e della brina non pare siasi da altri assegnata più adequata e ragionevole origine di quel che abbia fatto Walls. Egli vuole che amendue derivino dalla irradiazione dei corpi, e tale spiegazione è acconcissima a dichiarare tutti i particolari di tale fenomeno.

7. Se il vapore d' acqua elastico è più copioso nell' aria di quello che ne comporti l' attuale temperatura si hanno nebbie e nuvole. Questo doppio principio indica abbastanza l' origine delle nebbie che formansi ancora su i laghi e su i fiumi e quelle che sembran farsi in opposte circostanze.

Le nuvole non sono sempre nebbie innalzatesi da per se nell' alto o trasportatevi dal vento. In seno all' alta atmosfera posson anche formarsi per l' abbassamento di temperatura, o per lo mescersi di due arie differentemente calde. La forma delle nuvole è varia; e tale ancora la loro elevazione, ma secondo recentissime indagini la massima non dovrà esser maggiore di 16, 000 metri.

8. Allorchè il vapor concreto troppo s'addensa cade in pioggia. Il freddo dell' aria i venti e la disposizione dei monti assai influiscono nelle piogge. A misurarne la quantità s' usa dell' udometro.

Il freddo dell'atmosfera fa che nevighi in luogo di piovere. La neve ha varie e bizzarre forme che sembrano modificazioni dell' esaedro, il suo peso specifico è sempre minore di $\frac{1}{2}$ talora è $\frac{1}{20}$ o $\frac{1}{18}$ di quello dell' acqua. Essa talora è colorata

ma ciò si deve a corpicciuoli stranieri di natura or vegetabile or animale.

9. Non son mere favole le strane piogge narrate dagli antichi di latte sangue sassi ec. molte hanno qualche fondamento. A questa classe di fenomeni appartengono gli Aeroliti ed i Bolidi. Di queste straordinarie precipitazioni si darà contezza e si assegnerà quella cagione che nel presente stato della scienza pare più somigliante al vero.

10. Vaghissima è la mostra che di se spiega nell' atmosfera l' iride o arco baleno. Questo può considerarsi come il perimetro della base d' un cono la cui sommità è nell' occhio dell' osservatore ed il di cui asse prolungato passerebbe pel centro del sole. Ciò con altre osservazioni dimostra che il fenomeno dee ripetersi dai raggi solari che giungono all' occhio dopo essere stati refratti scomposti e riflessi da esse gocciole.

11. Parelio è la meteora che mostra lo spettacolo di più soli medianti immagini del vero. Più raro è il vedere più lune, allora la meteora dicesi Paraselene. Chiamiamo Aloni i grandi o piccoli cerchi luminosi che cingono il sole o la luna. Agli aloni assegniam doppia origine con i fisicipiù valenti. Fraunhofer insiem col Venturi vuole prodotti i piccoli aloni dalla luce diffratta dai piccoli vapori sparsi per l' aria, i più grandi poi dalla luce rifratta in piccoli cristallini di ghiaccio nuotanti per l' atmosfera. Però il parelio e la paraselene pare che meglio si spieghino secondo i principî dell' interferenza che della rifrazione.

12. Alle meteore ottiche devesi pur aggiungere

il Miraglio e le curiose apparenze che chiamano Mutate in Terra d'Otranto e Lavandaie in Puglia e la famosa Fata Morgana che s' osserva in più luoghi del nostro regno di Napoli: fenomeni tutti dovuti alla luce variamente rifratta o riflessa dalle varie parti dell' aria.

13. L' esistenza del fluido elettrico nell'atmosfera è innegabile. E d' indi appunto principalmente traggono i temporali : cioè quei complessi di fenomeni atmosferici che si palesano in un campo di nuvoli in alcuna loro parte tuonanti. Si dirà più in particolare dei lampi e dei fulmini o saette , dei tuoni e della folgore di ritorno , e dei loro soventi volte terribili , talora curiosi effetti. Finalmente della costruzione ed uso dei parafulmini o pali elettrici.

14. Dei vortici o trombe di mare e di terra e d'aria qualunque ne sia la grandezza diamo due probabili spiegazioni: elettrica l' una, l' altra meccanica. Di queste la seconda è bellamente confermata dalle recentissime sperienze del Conte Saverio de Maistre dalle quali si deduce come natural conseguente.

15. In gran parte almeno, elettrica altresì è la cagion della grandine , che si vuol ben distinta dalla neve e dal nevischio. Essa è varia di grandezza ma i suoi grani son ghiaccio più o men trasparente con entro un nocciuolo bianchiccio ora duro all' incirca quanto l' esterno ora meno , per lo più sferico. A riparo dalla grandine sonosi immaginati i paragrandini , qualcheduno ne verrà descritto ma insieme osserviamo tra per mancanza di tentativi tra per la difficoltà della cosa non ancora essere essi pervenuti alla loro perfezione.

# MATEMATICA

## SEZIONI CONICHE

L'equazione generale delle sezioni del cono tagliato da un piano, che non passi pel suo vertice è $y^2 = \frac{p}{2a}(2ax \mp x^2)$. La quale apparterrà al cerchio essendo $2a = p$, alla parabola se è $2a = \infty$, alla elisse se prendesi il segno superiore, o alla iperbole se prendesi l'inferiore. Lasciato il cerchio si dirà delle altre tre.

### *Della Parabola*

1. Essendo l'equazione della parabola $y^2 = px$ ( nella quale le coordinate $y$, $x$ sono ortogonali

e si riferiscono all' asse nel cui vertice hanno l'origine, e $p$ denota il parametro dell' asse medesimo) i quadrati delle ordinate saranno proporzionali alle ascisse corrispondenti; ed il parametro sarà la terza proporzionale dopo un ascissa e la corrispondente ordinata.

2. Indichi $z$ il raggio vettore d' un punto, la cui ascissa sia $x$, sarà $z = x + \frac{1}{4}p$. Però il raggio vettore d' un punto qualunque della parabola s' uguaglia alla distanza dello stesso punto dalla direttrice. La quale proprietà offre un mezzo per descrivere la parabola sopra un piano.

3. La suttangente è il doppio dell' ascissa del punto di contatto. Quindi segue: 1.° Potersi condurre facilmente una retta, la quale tocchi la parabola in un punto dato. 2.° La distanza del fuoco dalla tangente presa sull' asse, essere uguale alla distanza dello stesso fuoco dal contatto. Dal che si ha un altro modo di condurre la tangente per un punto dato sulla parabola. 3.° Essere eguali gli angoli che due rette condotte da un punto della parabola, l' una pel fuoco l' altra parallelamente all' asse, fanno colla tangente menata pel punto stesso.

4. La tangente menata per un punto, di cui $y$ è l'ordinata e $z$ il raggio vettore, è rappresentata da $2y\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{p}}$, la sunnormale da $\frac{p}{2}$ la normale, che indicheremo con $n$, da $\sqrt{pz}$. Onde la normale sta

alla tangente ; come il parametro al doppio della ordinata del contatto. La sunnormale è una retta costante ; ed eguagliasi alla metà del parametro. Le distanze del fuoco dalla normale e dalla tangente computate sull' asse sono uguali fra loro, ed al raggio vettore del punto di contatto.

5. Condotta da un punto qualunque della parabola la normale ed il raggio vettore, e dal punto in cui la normale s' incontra coll' asse menata una perpendicolare al raggio vettore ; la parte di questo raggio compresa dal punto della parabola e la perpendicolare sarà eguale alla metà del parametro. La perpendicolare che dal fuoco si tira alla tangente è la metà della normale. La normale è la quarta proporzionale dopo questa perpendicolare, dopo la metà del parametro, ed il raggio vettore. E la perpendicolare medesima è la media proporzionale tra la quarta parte del parametro ed il raggio vettore.

6. Chiamando $\phi$ l' angolo che fa il raggio vettore di un punto, la cui ascissa è $x$, colla parte dell' asse superiore al fuoco, s' avrà

$$x = \frac{1}{4}p\ tan^2 \frac{1}{2}\phi\ ;\ \text{e}\ z = \frac{p}{4cos^2 \frac{1}{2}\phi},$$ che è l'equazione della parabola alle coordinate polari. Da queste due equazioni deducesi, che avendo due parabole lo stesso fuoco e gli assi sulla medesima retta, i raggi vettori di due loro punti che trovinsi sulla retta stessa, stanno fra loro, come i parametri delle rispettive parabole; o come le ascisse corrispondenti ai punti dai quali si partono i raggi vettori.

7. Se i punti della parabola si vogliano determinare per mezzo delle coordinate oblique, delle quali una sia parallela ad una tangente della parabola e l'altra sia calcolata sul diametro, che parte dal contatto (nel qual punto di contatto pongasi l'origine delle stesse coordinate); l'equazione sarà del tutto analoga a quella che risulta essendo le coordinate ortogonali e riferite all'asse. Per tanto 1.° Ogni diametro divide per metà le corde parallele alla tangente nel suo vertice 2.° Ogni diametro ha un parametro il qual è il raggio vettore del suo vertice quadruplicato.

8. Problemi. 1.° Dato l'asse ed il parametro d'una parabola, determinare sull'asse un punto, da cui condotta l'ordinata, il diametro che ha per vertice l'estremo di essa, faccia un dato angolo con le sue ordinate. 2.° Dato il parametro d'un diametro, e l'angolo che esso fa con le sue ordinate, determinare l'asse il fuoco ed il parametro della parabola.

### *Della Ellisse*

1. L'equazione dell'ellisse $y^2 = \frac{p}{2a}(2ax - x^2)$

messo invece di $p$ parametro dell'asse maggiore $\frac{4b^2}{2a}$, cangiasi in quest'altra $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$: nella quale $a$ e $b$ indicano le metà degli assi maggiore e minore; e le coordinate si computano da uno dei vertici del primo asse. Da que-

sta equazione si ha $y^2 : x(2a - x) = b^2 : a^2$; e però se col centro dell'ellisse e colla metà dell' asse maggiore descrivesi un cerchio, le ordinate della ellisse saranno geometricamente proporzionali a quelle del cerchio, che si trovano colle prime sulla stessa retta. Da ciò si trae un metodo di descrivere l' ellisse.

2. Se l' origine delle coordinate si pone nel centro, l' equazione dell'ellisse è $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$; da cui si ha l' altra $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$. Onde siccome il primo asse taglia per metà le corde parallele al secondo, così questo divide egualmente le parallele al primo. Dalle stesse equazioni si ricava esser l' ellisse simmetricamente posta rispetto a' suoi assi; e le quattro parti in cui è da essi divisa essere uguali fra loro. La retta $\frac{2a^2}{b}$ dicesi parametro dell' asse minore e s' indica con $p'$, come con $p$ s' indica il parametro del maggiore uguale a $\frac{2b^2}{a}$. Essendo $a = b$, l'equazione dell' ellisse diviene quella del cerchio; però chiamasi questo ellisse equilatera, o di assi eguali.

3. Ritenendo l' origine nel centro, e dinotando $c$ l' eccentricità, e $z$, $z'$ i raggi vettori di un punto qualunque, di cui $x$ sia l' ascissa presa sull'

asse maggiore, sarà $z = a - \frac{cx}{a}$, $z' = a + \frac{cx}{a}$.

Pertanto la somma dei raggi vettori d'un punto qualunque della curva è costantemente uguale all' asse maggiore. Di qui un altro metodo per descrivere l'ellisse.

4. L'equazione dell'ellisse tra le coordinate polari è $z = \frac{a(1 - e^2)}{1 \pm e \cos \varphi}$; $e$ indica il rapporto $\frac{c}{a}$, $\varphi$ l'angolo fatto dal raggio vettore $z$ e dalla eccentricità $c$; ha luogo il segno superiore o inferiore, secondo che l'origine dell'angolo $\varphi$ prendesi nel vertice più vicino o più lontano dal fuoco a cui termina il raggio vettore.

5. La suttangente nell'ellisse è quarta proporzionale dopo l'ascissa del punto di contatto, e le distanze dell'ordinata corrispondente da ambi i vertici; prendesi l'ascissa sull'asse maggiore cominciando dal centro. Da questo deducesi il metodo di condurre una tangente alla curva per un punto dato sopra di essa.

6. La distanza del centro dalla tangente computata sull'asse maggiore è terza proporzionale dopo l'ascissa del contatto, e la metà del medesimo asse. La distanza di ciascuno dei fuochi dalla tangente computata anche sull'asse maggiore è quarta proporzionale in ordine all'ascissa del contatto, al raggio vettore dello stesso contatto, ed alla metà dell'asse maggiore: e però i raggi vettori del punto di contatto stanno tra loro come le distan-

ze dei fuochi dalla tangente calcolate sull' asse maggiore. La distanza di ciascun dei vertici dalla tangente presa nell' anzidetto asse è quarta proporzionale dopo l' ascissa del punto di contatto, la distanza del vertice dall' ordinata corrispondente, ed il semiasse maggiore.

7. La sunnormale è quarta proporzionale dopo l' asse maggiore, il parametro dello stesso asse; e l' ascissa del punto di contatto. La distanza della normale dalla tangente è quarta proporzionale dopo l' ascissa, ed i raggi vettori del punto di contatto. La tangente fa coi raggi vettori del punto di contatto angoli eguali; e divide per metà l'angolo adiacente a quello degli stessi raggi. Ricavasi da questo un' altra maniera di condurre per un punto dato sulla ellisse una tangente. Preso sull' asse maggiore cominciando da uno dei suoi vertici un segmento uguale ad uno dei raggi vettori del punto di contatto, l' ordinata corrispondente a questo segmento s' uguaglia alla normale.

8. Il semiasse minore è medio proporzionale tra la normale e la perpendicolare condotta dal centro alla tangente, ovvero tra le due perpendicolari menate alla stessa tangente dai fuochi. La normale è quarta proporzionale dopo la perpendicolare tirata dal centro alla tangente e le altre due condotte dai fuochi, o anche dopo la perpendicolare calata alla tangente da uno dei fuochi, dopo la distanza di questo fuoco dal contatto, e la metà del parametro dell' asse maggiore. Dal punto in cui la normale incontra l' asse si tirino due perpendicolari ai raggi vettori del contatto,

le parti di questi raggi tramezzate dal contatto e dalle perpendicolari saranno uguali fra loro ed alla metà del parametro dell' asse maggiore: e se pel centro si tiri una parallela alla tangente e si prolunghi finchè incontri i raggi vettori del contatto, le parti di questi raggi comprese dal contatto e dalla parallela s' eguagliano fra loro ed alla metà dell' asse maggiore.

9. Quando la sunnormale, la normale, la suttangente, e la tangente si riferissero all' asse minore, avrebber luogo conseguenze analoghe alle sopraddette nel riferire queste rette all'asse maggiore.

10. Dalle estremità di un diametro e del suo coniugato poste alla stessa parte dell' asse maggiore si tirino a questo asse le ordinate; la somma dei quadrati di queste ordinate s' uguaglierà al quadrato del semiasse minore, e la somma dei quadrati delle ascisse corrispondenti calcolate dal centro, al quadrato del semiasse maggiore. Però la somma dei quadrati dei due diametri coniugati eguagliasi alla somma dei quadrati fatti sugli assi. Di più tutti i parallelogrammi circoscritti alla ellisse s' uguagliano fra loro ed al rettangolo degli assi.

11. Indichino $m$, $n$ le metà di due diametri coniugati e $\gamma$ uno dei loro angoli adiacenti, sarà $m^2 + n^2 = a^2 + b^2$, ed $mn \operatorname{sen} \gamma = ab$. Però ogni ellisse ha due diametri coniugati eguali, i quali saranno determinati dalle precedenti equazioni.

12. L' equazione dell' ellisse a' diametri coniu-

gati è simile all' equazione agli assi. Adunque ogni diametro sega per metà l' ellisse, ed è diviso egualmente nel centro.

13. Problemi. 1.° Dati i due assi dell' ellisse, determinare i due diametri coniugati che comprendono un angolo dato. 2.° Dati i diametri coniugati ed il loro angolo, ritrovare gli assi e la loro direzione.

*Della Iperbole*

1. Usando le stesse denominazioni che nell'ellisse, l' equazione dell' iperbole si riduce ad

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,(\,2ax + x^2\,),$$ nella quale le coordinate hanno anche nel vertice della curva la loro origine. Questa equazione mostra, 1.° che ad ogni iperbole ne corrisponde un' altra perfettamente uguale, che ha gli stessi assi ed il vertice lontano dal vertice della prima per l' asse maggiore; 2.° che il quadrato di qualunque ordinata all' asse maggiore sta al rettangolo fatto sulle distanze di essa dai vertici dell' asse medesimo, come il quadrato dell' asse minore al quadrato del maggiore.

2. Trasportata l'origine nel centro l' equazione all' asse maggiore sarà $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,(\,x^2 - a^2\,)$, da cui si deduce l'altra all'asse minore $x^2 = \frac{a^2}{b^2} \times (\,b^2 + y^2\,)$. Però ciascun asse sega per metà

le corde all' altro parallele. Essendo i due assi uguali l' iperbole dicesi equilatera.

3. Lasciata l'origine nel centro si ha $z = \frac{cx}{a} - a$, $z' = \frac{cx}{a} + a$. Onde la differenza dei raggi vettori d' uno stesso punto s' eguaglia all' asse maggiore. Da questa proprietà nasce una maniera di descrivere l' iperbole.

4. L' equazione dell' iperbole tra le coordinate polari è $z = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e\cos\phi}$, nella quale si ritengono, siccome anche appresso, le denominazioni adoperate nell' ellisse.

5. La suttangente dell' iperbole, come quella dell' ellisse, è quarta proporzionale dopo la distanza dell' ordinata del contatto dal centro e dai due vertici della curva. Si conosce però come debba condursi per un punto dato sulla curva la tangente.

6. Segue anche che, come nella ellisse, la distanza della tangente dal centro è $\frac{a^2}{x}$; da' fuochi $\frac{a}{x} z$, $\frac{a}{x} z'$; e da' vertici dell' asse maggiore $\frac{a(x-a)}{x}$, $\frac{a(x+a)}{x}$. Queste distanze sono eziandio calcolate sull' asse maggiore. Parimente la sunnormale è uguale eziandio a $\frac{px}{2a}$: la distanza del

centro dalla normale presa sull' asse a $\frac{c^2x}{a^2}$; la somma della suttangente e della sunnormale a $\frac{zz'}{x}$; la distanza dei fuochi dalla normale calcolata ancora sull' asse a $\frac{z(a+z)}{x}$, ed a $\frac{z'(a+z)}{x}$, la tangente ad $\frac{1}{ax}\sqrt{(x^2-a^2)(c^2x^2-a^4)}$; la normale finalmente a $\frac{b}{a}\sqrt{2az+z^2}$. Dalle quali equazioni si dedurranno nella iperbole quasi tutti que' teoremi, che si son dedotti nella ellisse.

7. Inoltre calate da' fuochi e dal centro le perpendicolari $q$, $q'$, $q''$ alla tangente, e dall' estremo della normale $n$ le perpendicolari a' raggi vettori del punto di contatto, e condotta dal centro la parallela alla tangente e prolungatala finchè incontri gli stessi raggi, s' avrà similmente $nq''=$ $=b^2=qq'$, $n=\frac{b^2z}{aq}=\frac{pz}{2q}$, e le parti de' raggi vettori tramezzate tra il contatto e le perpendicolari ad essi menate dall' estremità della normale uguali fra loro ed alla metà del parametro; e le altre loro parti comprese anche dal contatto e dalla parallela alla tangente uguali altresì tra loro ed al semiasse maggiore.

8. Sia il vertice dell' iperbole il punto medio d' una retta menata per esso, parallela ed uguale all' asse minore, se pel centro e per l' estremità

di essa retta se ne conducano due altre, saranno queste asintoti della curva. Tra le distanze di un punto qualunque dell' iperbole da' suoi asintoti prese sopra una retta parallela all' asse minore è media proporzionale la metà di questo asse.

9. Rappresentisi con $m$ la parte di uno degli asintoti tramezzata dal centro e da una retta condotta dal vertice parallelamente all' altro asintoto; e con $t$, $v$ le coordinate agli asintoti medesimi; sarà $m^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$, e $tv = \frac{a^2 + b^2}{4}$; $m^2$ chiamasi potenza dell' iperbole, e la seconda equazione è l' equazione agli asintoti.

10. Condotte due rette parallele e terminatele agli asintoti, i rettangoli che si faranno sulle loro parti contenute da uno de' punti in cui incontrano la curva e da quelli in cui incontrano gli asintoti, s' eguaglieranno fra loro. Da ciò si deduce 1.° Come debba condursi all' iperbole una tangente per un punto dato sopra di essa. 2.° Che prolungata una corda qualunque della curva fino agli asintoti, i prolungamenti s' eguaglieranno fra loro. 3.° Come si debba descrivere l'iperbole, essendo dati gli asintoti ed un punto pel quale si voglia far passare la curva.

11. Ogni diametro dell' iperbole divide per metà le corde parallele alla tangente condotta pel vertice dello stesso diametro. L' equazione dell' iperbole a' diametri coniugati è del tutto simile alla equazione agli assi. Però il diametro coniugato divide egualmente le rette che si tiran parallele al diametro trasverso, e terminano alle iperboli op-

poste. E se per gli estremi dello stesso diametro trasverso si tirino due rette parallele al coniugato e vicendevolmente per gli estremi di questo due parallele al primo, il parallelogrammo toccherà le iperboli opposte nei vertici dell' asse trasverso.

12. Da un estremo del diametro trasverso e da un estremo del coniugato si menino all' asse maggiore due perpendicolari, i rettangoli fatti sopra queste e sopra le parti corrispondenti dell' asse tramezzate da esse e dal centro saranno equivalenti. Il parallelogrammo che ha i lati eguali, e paralleli a due diametri coniugati, s'eguaglia in superficie al rettangolo fatto sugli assi. La differenza de' quadrati fatti sulle perpendicolari anzidette menate all' asse maggiore eguagliasi al quadrato del semiasse minore; e la differenza di quelli fatti sulle corrispondenti parti dell' asse s' uguaglia al quadrato del semiasse maggiore. Però la differenza de' quadrati dei diametri coniugati è uguale a quella de' quadrati degli assi. Nella iperbole equilatera i diametri coniugati s' eguagliano fra loro.

13. Problemi. 1.° Dati gli assi dell' iperbole, determinare i due diametri coniugati che comprendono un angolo dato. 2.° Dati i diametri coniugati con l' angolo che fanno, determinare la lunghezza e la direzione degli assi.

## CALCOLO DIFFERENZIALE

*Della differenziazione delle funzioni algebraiche*

1. Indichi $dy$ il differenziale della funzione $y=f(x)$, e $dx$ quello della variabile independente $x$, il limite del rapporto $\frac{dy}{dx}$, ovvero il coefficiente differenziale della funzione, è il coefficiente di quel termine della serie, in cui si svolge $f(x+h)$ secondo le potenze ascendenti di $h$, nel quale trovasi la potenza prima di $h$. La quantità $h$ dinota un accrescimento della variabile. Però rappresentando $A$ questo coefficiente sarà $\frac{dx}{dy}=A$, e $dy=Adx$. Se per lo contrario dovesse togliersi alla variabile la quantità $h$, avrebbesi lo stesso risultato ponendo $-h$ nella serie in cui svolgesi $f(x+h)$, o lasciato in essa $+h$, mutando nella equazione $dy=Adx$ $dx$ in $-dx$.

2. Da ciò si deducono i seguenti teoremi. 1.° Il differenziale di $y=f(x)\pm m$ s' uguaglia al differenziale di $y=f(x)$; e il differenziale di $y=mf(x)$ è uguale al prodotto di $m$ pel differenziale di $y=f(x)$, essendo $m$ costante. 2.° Il differenziale della somma o differenza di più funzioni dipendenti dalla stessa variabile eguagliasi alla somma o alla differenza de' differenziali delle stesse funzioni. 3.° Il differenziale di un prodotto di più funzioni della medesima variabile si compone della somma de' prodotti del differenziale di ciascuna funzione moltiplicato per tutte le altre.

4.° Il differenziale del quoto d' una funzione divisa per un' altra funzione della stessa variabile s' ottiene sottraendo dal differenziale della prima moltiplicato per la seconda il differenziale della seconda moltiplicato per la prima, e dividendo il restante pel quadrato della seconda funzione. 5.° Qualunque sia la costante $m$ nella equazione $y = x^m$ intera o fratta, positiva o negativa; sarà $dy = dx^m = mx^{m-1}\, dx$. 6.° Sia $y = f(u)$, ed $u = \varphi(x)$,

sarà $\frac{dy}{dx}$ uguale al prodotto de' coefficienti differenziali delle due funzioni riferite ciascuna alla sua variabile immediata.

### *Dei differenziali successivi e della formola di Maclaurin*

1. Il coefficiente differenziale di $y = f(x)$ è generalmente un'altra funzione di $x$; però differenziandolo potrà ottenersi anche una nuova funzione della stessa variabile; in tal guisa successivamente differenziando nasceranno diverse funzioni, o coefficienti differenziali, che diconsi di primo ordine, di secondo, ec.; secondochè corrispondono alla prima differenziazione, alla seconda, ec. Però riguardando $dx$ come costante avremo

$$p = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx},\ p' = \frac{dp}{dx} = \frac{d.df(x)}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$$

2. Ciò premesso svolgasi $y = f(x)$ nella serie

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots \quad (a);$$

e $(y)$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$, $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)$,... indichino quel che diventano $y$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, ... quando è $x = o$ : sarà $A = (y)$, $B = \left(\frac{dy}{dx}\right)$, $C = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, $D = \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$, $E = \frac{1}{2.3.4}\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)$, ...
e la serie $(a)$ diverrà

$$(y) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{x}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{x^2}{1.2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\frac{x^3}{1.2.3} + \\ + \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)\frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

Che è la formola di Maclaurin.

3. Si adopereranno queste formole nello svolgere in serie le funzioni

$$\frac{1}{a+x}, \sqrt{a^2 + bx^2}, (a+x)^m.$$

*Dei differenziali delle funzioni trascendenti*

1. Il differenziale di una esponenziale a base costante si uguaglia al prodotto del logaritmo neperiano della base moltiplicato per la stessa esponenziale e pel differenziale dell' esponente. Onde se la base dell' esponenziale è la base dei logaritmi neperiani, il differenziale dell' esponenziale sarà eguale al prodotto della esponenziale pel differenziale dell' esponente.

2. Denoti $a$ la base d' un sistema di logaritmi ed $y$ il logaritmo di un numero $x$, si avrà $dy = \frac{dx}{x} \, log.e$: il logaritmo di $e$ prendesi nel sistema la cui base è $a$. Però quando s' avesse $a = e$ sarebbe $dy = \frac{dx}{x}$.

3. Il differenziale del seno d' un arco si ha moltiplicando il differenziale dell' arco pel coseno dello stesso arco, posto che il raggio sia $1$; non essendolo dovrà il coseno dividersi pel raggio.

4. Si determineranno i differenziali della funzioni $a^{b^x}$, $z^u$, $z^{t^u}$.

*Della formola di Taylor*

1. Posto $x + h$ invece di $x$ nella $f(x)$, vengono le seguenti equazioni

$$\frac{df(x+h)}{dx} = \frac{df(x+h)}{dh},$$

$$\frac{d^2f(x+h)}{dx^2} = \frac{d^2f(x+h)}{dh^2},$$

.....................................

I primi membri indicano i coefficienti differenziali di $f(x+h)$ differenziata per rispetto ad $x$, i secondi i coefficienti della stessa funzione differenziata per rispetto ad $h$.

2. Di qui deducesi, i coefficienti $A$, $B$, $C$,.... della serie $f(x) + Ah, + Bh^2 + Ch^3 + \ldots$; $(b)$,

in cui è svolta $f(x+h)$, potersi determinare per mezzo delle equazioni $A = \frac{dy}{dx}$, $B = \frac{1}{2}\frac{d^2y}{d^2x}$, $C = \frac{1}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}$, .... In tal guisa la serie ($b$) cangiasi nella seguente, che è la formola di Taylor,

$$y + \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots$$

3. Si svolgeranno in serie $\sqrt{x+h}$, $sen\,(x+h)$, $cos\,(x+h)$, $log\,(x+h)$.

4. Alcune volte che $x$ riceve un valor particolare, la detta formola è inetta a dar lo svolgimento in serie della $f(x+h)$. Si dirà del metodo che deve in tal caso seguirsi.

*Dei differenziali delle funzioni di più variabili*

1. Sia $u = f(x, y)$, e le variabili $x$, $y$, sieno independenti fra loro; e rappresentino $\frac{du}{dx}dx$, e $\frac{du}{dy}dy$ i differenziali incompleti della funzione, cioè quelli che s' ottengono differenziandola solamente rispetto ad $x$ o ad $y$: sarà $du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$.

Lo stesso ha luogo se sono più le variabili independenti.

2. Si esporrà come s' ottenga il differenziale incompleto o completo di qualunque funzione im-

plicita contenuta nell' equazione $f(x, y, z \ldots)=0$, non risolvendo l' equazione.

*Del metodo delle tangenti e degli asintoti delle curve*

1. Denotino $x$, $y$ le coordinate ortogonali d' una curva piana; si dimostreranno le equazioni seguenti:

$$suttang = y \frac{dx}{dy}, \quad sunnorm = y \frac{dy}{dx},$$

$$tang = y \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 1\right)}, \quad norm = y \sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)}.$$

2. Determineremo la suttangente della parabola, la sunnormale dell'ellisse, e la tangente del cerchio.

3. Essendo $y = f(x)$ l' equazione della curva, ed $x'$, $y'$, le coordinate del contatto d' una tangente di questa curva, l' equazione di essa tangente sarà $y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x')$. Dalla quale equazione si deduce che delle due distanze tra l' origine delle coordinate ed i punti ne' quali la tangente sega gli assi delle ascisse e delle ordinate, la prima è indicata da $x' - y' \frac{dx'}{dy'}$, la seconda da $y' - x' \frac{dy'}{dx'}$. Se dunque quando una delle coordinate diviene infinita, restino finite amendue queste distanze, o una di esse, la curva avrà asintoto.

4. Onde per essere $y^2 = mx + nx^2$ l' equazione delle sezioni coniche, tra esse la sola iperbole terrà gli asintoti.

### *Delle funzioni che prendono la forma indeterminata $\frac{o}{o}$ per un valor particolare della variabile*

1. Allorchè $\frac{F(x)}{f(x)}$ diviene $\frac{o}{o}$ posto $x = a$, le due funzioni hanno un fattore comune uguale ad una potenza di $(x - a)$: tolto il quale, il fratto si ridurrebbe al suo vero valore. A torlo giovano le successive differenziazioni.

2. Con questo mezzo delle funzioni $\frac{x^3 - b^3}{4x - 4b}$, $\frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 6x^2 + 8x - 3}$, $\frac{a^x - b^x}{x}$ la prima si mostrerà uguale a $\frac{3b^2}{4}$ quando è $x = b$, la seconda all' infinito essendo $x = 1$, l' ultima a $log.\ a - log.\ b$ annullandosi $x$.

3. Se la funzione per un valor particolare di $x$ diventasse $\frac{\infty}{\infty}$, ovvero $o.\infty$, si determinerebbe come la precedente.

### *Dei massimi e minimi valori delle funzioni d' una stessa variabile*

1. Una funzione di $x$ ha un valor massimo o un minimo o l' uno e l' altro, se il primo tra' suoi coefficienti differenziali d' ordine pari, che

non isvanisce, è positivo o negativo o può esser preso positivamente o negativamente.

2. Delle funzioni $a - bx + x^2$; $a^4 + b^3x - c^2 x^2$, $3a^2 x^2 - b^4x + c^3$, si dirà quale abbia uno di questi valori, e quale abbiali amendue.

3. Problemi. 1.° Determinare le due parti d'un numero, il cui prodotto è un massimo. 2.° Tra i cilindri iscritti in un dato cono retto determinare quello, che ha il massimo volume. 3.° Tra i coni iscritti ad una sfera data determinare quello, la cui superficie convessa è massima. 4.° Tra tutti i vasi cilindrici, ne' quali cape un dato volume d'acqua, ritrovar quello che ha la minima superficie interna. 5.° Da due punti dati condurre ad una retta anche data, la quale trovisi in uno stesso piano coi punti, due rette la cui somma sia minima.

## CALCOLO INTEGRALE

### *Della integrazione de' differenziali monomi*

1. I differenziali algebraici monomi s'esprimono generalmente da $x^m dx$. Or si dimostrerà essere $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$.

2. Poichè le quantità costanti che sono per avventura aggiunte o tolte ad una funzione, non si ritrovano nel suo differenziale; si pone nell'integrale una quantità costante $C$, il cui valore si determina colle condizioni che si danno ne' casi

particolari. Così l' integrale di $dy = 2\,axdx$ è $y = ax^2 + C$: la quale equazione essendo $C$ indeterminato apparterrà ad una infinità di parabole; ma se vogliasi, che appartenga a quella che passi per un punto privo d' ordinata, e la cui ascissa sia $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$, dovrà farsi $C = -b$.

3. Nella equazione $y = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$ essendo $C$ indeterminata per difetto di condizioni si può scrivere in suo luogo $-\frac{b^{m+1}}{m+1}$, supponendosi che allo svanire di $y$, $x$ si eguagli a $b$; sarà pertanto $y = \frac{x^{m+1} - b^{m+1}}{m+1}$

Il qual valore essendo $m = -1$ diverrà $log.a - - log.\ b$.

*Dell' integrazione dei differenziali complessi*

1. L' integrale d' un differenziale che è la somma o differenza di altri differenziali si compone della somma o differenza degl' integrali di quei medesimi differenziali. Sarà per esempio

$$\int\left(adx - \frac{bdx}{x^3} + xdx\sqrt{x}\right) = \int adx - \int\frac{bdx}{x^3} + + \int x^{\frac{3}{2}}\,dx + C.$$

2. Per integrare un differenziale della forma $(a + bx + cx^2 + \ldots\ldots)^n\,dx$ allorchè $n$ è un nu-

mero intero, svolgesi il primo fattore, si moltiplicano di poi tutti i termini per $dx$, e s' integra finalmente ciascun prodotto.

3. L' integrale di $(f(x))^n\, d f(x)$, cioè d' un prodotto di due fattori, de' quali il secondo è il differenziale della quantità chiusa nella parentesi del primo, posto $f(x) = z$, s' integra agevolmente.

4. Allorchè il secondo fattore differisce per una quantità costante da $df(x)$ s' ottiene con pari facilità l' integrale del sopraddetto differenziale. S' integreranno con questo mezzo l' espressioni

$$(a + bx^2)^{\frac{1}{2}}\, mxdx \;,\; \frac{adx}{a \pm bx}$$

*Degl' integrali che s' esprimono per mezzo degli archi circolari*

1. Si dimostreranno le seguenti equazioni

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\ \text{arc. sen}x,\quad \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\ \text{arc. cos}\ x$$

$$\frac{dx}{1+x^2} = d\ \text{arc. tan}x,\quad \frac{-dx}{1+x^2} = d\ \text{arc. cot}\ x$$

$$\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = d\ \text{arc. sec}\ x,\quad \frac{-dx}{x\sqrt{x^2-1}} = d\,\text{arc.cosec}\,x$$

$$\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = d\ \text{arc. s. v.}\ x,\quad \frac{-dx}{\sqrt{2x-x^2}} = d\,\text{arc. c. v.}\,x$$

Per le quali equazioni gl' integrali de' primi

membri saranno gli archi scritti nei secondi aggiunti alle costanti. Se pongasi che debbano svanire gl'integrali quando $x$ diviene $1$ negli $arc. sec. x +$ $+ C$, ed $arc. cosec\ x + C$, e quando diviene $o$ negli altri, la costante sarà determinata, ed avrassi

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc. sen\ x, \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = -(90^\circ - arc. cos x)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arc. tan\ x, \int \frac{-dx}{1+x^2} = -(90^\circ - arc.\ cot. x)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = arc. sec x, \int \frac{-dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -(90^\circ - arc. cosec x)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = arc. s. v. x, \int \frac{-dx}{\sqrt{2x-x^2}} = -(90^\circ - arc. c. v. x)$$

2. I differenziali $\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $\frac{dx}{a^2+x^2}$ posson ridursi ad aver la stessa forma che $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, e $\frac{dx}{1+x^2}$; e però s' integreranno come questi.

*Dell' integrazione per parti*

1. Dall' equazione $d.\ uv = udv + vdu$ ($u$, e $v$ son funzioni della stessa variabile) risulta $\int udv =$ $= uv - \int vdu$. I differenziali che s' integrano per mezzo di questa formola s' integrano per parti.

2. Integreremo i differenziali $a^m\ dx$, $dx log. x$, $dx \sqrt{(a^2 - x^2)}$.

*Dell' integrazione per serie*

1. Svolto il fattore $X$ di $Xdx$ denotante una funzione qualunque di $x$ nella serie

$Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots,$ s' ottiene

$$\int Xdx = \frac{Ax^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{Bx^{\beta+1}}{\beta+1} + \frac{Cx^{\gamma+1}}{\gamma+1} + \ldots + C.$$

2. Integrando con questo metodo $\frac{dx}{a+x}$, $\frac{dx}{1+x^2}$ e $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ viene,

$$\int \frac{dx}{a+x} = log\ (a+x) = log\ a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \ldots \quad (a),$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arc.\ tang.\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots \quad (b),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc.\ sen.\ x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} + \ldots \quad (c).$$

Nelle quali serie le costanti indicano que' valori che hanno i rispettivi integrali annullandosi $x$.

3. Dalla serie (*a*) ricavasi quest' altra

$$log.\ \frac{a+x}{a-x}=2\left(\frac{x}{a}+\frac{x^3}{3a^3}+\frac{x^5}{5a^5}+\ldots\right),$$

che può adoperarsi per trovare i logaritmi neperiani de' numeri.

4. Essendo $x$ maggior dell' unità la serie (*b*) può cangiarsi nella seguente

$$arc.\ tang.\ x = 90^0 - \frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\ldots,$$

in cui $90^0$ indica la costante.

5. Per mezzo della serie (*c*) può determinarsi il valor prossimo al vero della periferia del cerchio.

*Dell'integrazione delle frazioni razionali*

1. L' espressione generale di queste frazioni è

$$\frac{Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots+Rx+S}{x^m+Q'x^{m-1}+\ldots+R'x+S'}\,dx.$$

I fattori $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$,...., da cui si può riguardar composto il denominatore di questa espressione, potranno essere reali o immaginarî, eguali o ineguali. Sien tutti reali ed ineguali, sarà

$$\frac{Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots+Rx+S}{(x-a)(x-b)(x-c)\ldots}\,dx=$$

$$=\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots\right)dx.$$

Si suppongano anche reali, ma sieno eguali verrà

$$\frac{Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots+Rx+S}{(x-a)^m}dx=$$

$$=\left(\frac{D}{(x-\alpha)^{m}}+\frac{D^{1}}{(x-\alpha)^{m-1}}+\frac{D^{11}}{(x-\alpha)^{m-2}}+\ldots\right)dx.$$

Essendo imaginarî ed ineguali indicando $(x+\alpha)^2+\beta^2$, $(x+\alpha^1)^2+\beta^{12}$, $(x+\alpha^{11})^2+\beta^{112}$,.... i fattori di secondo grado sarà in terzo luogo

$$\frac{Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots+Rx+S}{((x+\alpha)^2+\beta^2)((x+\alpha^1)^2+\beta^{12})((x+\alpha^{11})^2+\beta^{112})\ldots}dx=$$

$$=\left(\frac{E+Fx}{(x+\alpha)^2+\beta^2}+\frac{G+Hx}{(x+\alpha^1)^2+\beta^{12}}+\frac{K+Lx}{(x+\alpha^{11})^2+\beta^{112}}+\ldots\right)dx.$$

Finalmente se i detti fattori di secondo grado sieno uguali sarà

$$\frac{Px^{m-1}Qx^{m-2}+\ldots+Rx+S}{((x+\alpha)^2+\beta^2)^p}dx=$$

$$=\left(\frac{M+Nx}{((x+\alpha)^2+\beta^2)^p}+\frac{M^1+N^1x}{((x+\alpha)^2+\beta^2)^{p-1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{M^{11}+N^{11}x}{((x+\alpha)^2+\beta^2)^{p-2}}+\ldots\right)dx.$$

Quando il denominatore della frazione ha radici reali eguali ed ineguali, ed ha insieme radici immaginarie, di cui alcune coppie sieno eguali, altre ineguali; l' espression generale s' eguaglierà alla somma di più frazioni della stessa forma delle precedenti.

2. Da questo segue che gl' integrali de' fratti

razionali s' esprimano per mezzo di quantità algebraiche, di logaritmi, e di archi circolari in funzione delle loro tangenti.

3. Con questo metodo s' avrà per integrale della frazione $\frac{dx}{x^8 + x^7 - x^4 - x^3}$ la quantità $\frac{2 - 2x - 5x^2}{4x^2(1 + x)} +$

$$+ \frac{1}{8} \log \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + \log \frac{x + 1}{x} - \frac{1}{4} \, arc. \, tan. \, x + C.$$

### *Della integrazione delle funzioni irrazionali*

1. Le funzioni irrazionali s' integrerebbero esattamente se potesser trasformarsi in funzioni razionali. Ciò può farsi 1.° Quando i radicali contenuti nella funzione sien monomî, 2.° Quando vi si contenga un radicale della forma $\sqrt{a + bx \pm x^2}$, 3.° Finalmente quando contenendovisi l' espression binomia $x^{m-1}(a + bx^n)^{\frac{p}{q}}$ sia intero $\frac{m}{n}$, ovvero $\frac{m}{n} +$ $+ \frac{p}{q}$, se queste cose non hanno luogo s' integreranno per serie.

2. S' otterranno gl' integrali di $dx\sqrt{m^2 + x^2}$,

$$\frac{dx}{\sqrt{(a + bx - x^2)}}, \; x^4 \, dx \sqrt[3]{(a + bx^3)}, \; x^5 dx \sqrt[3]{(a + bx^2)^2}$$

*Della quadratura delle curve e della rettificazione degli archi*

1. $Xdx$ è il differenziale d' una superficie curvilinea, allorchè $X$ denota $f(x)$, cioè le ordinate della curva. Però la quadratura d' uno spazio curvilineo s' otterrebbe potendosi integrare il detto differenziale. Quadreremo le aie delle parabole, le cui equazioni sono $y^2 = mx$, $y^2 = m + nx^2$.

2. Parimente per mezzo dell' integrale di $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, che è il differenziale dell'arco di qualunque curva, lo stesso arco si rettificherebbe. Si porterà per esempio l' arco della cicloide che ha per equazione $dx = \frac{ydy}{\sqrt{2ay - y^2}}$

## MECCANICA

### DELL' EQUILIBRIO DELLE MACCHINE

*Della Leva*

1. Nella leva una potenza $P$ equilibrasi con un peso $Q$, quando è $Pa = Qb$; $a$, $b$ indicano le rispettive braccia della potenza e del peso. Però nell' equilibrio la potenza ed il peso son tra loro in ragion reciproca delle braccia.

2. Poste le direzioni della potenza e del peso parallele fra loro, nel primo genere di leva la potenza può esser maggiore o minore del peso; ma nel secondo è sempre minore, e nel terzo maggiore.

3. Allorchè si tiene conto del peso proprio della leva diventa l' equazione dell' equilibrio $Pa \pm \pm Vc = Qb$. $V$ rappresenta il detto peso e $c$ la distanza del fulcro dal centro di gravità della leva.

4. L' allungar la leva di secondo genere se per una parte giova alla potenza per l' accrescimento del braccio $a$, le nuoce dall' altra aumentandosi anche il momento $Vc$. Si assegnerà pertanto la lunghezza di questa leva che dia il maggior vantaggio alla potenza, supponendosi dato il peso ed il suo braccio.

## *Della Bilancia*

1. Nella bilancia due pesi eguali debbono equilibrarsi fra loro. Al che si richiede che la bilancia anche scarica de' pesi conservi l' equilibrio, e che le due braccia siano d' eguale lunghezza.

2. Benchè la bilancia manchi d' alcuna di queste due condizioni, può servire a determinar giustamente il peso.

3. La squisitezza di questa macchina e la comodità del maneggiarla esigono queste altre condizioni. 1.° Che per ogni menoma disuguaglianza de' due pesi l' ago lentamente s' inclini fermandosi in una situazione obliqua all' orizzonte, senza però che del tutto trabocchi. 2.° Che essendo la bilancia equilibrata, se l' ago venga casualmente a piegarsi non si fermi in quella situazione inclinata, nè trabocchi; ma lentamente si riconduca alla situazione orizzontale. Conoscesi quando s' adempiano queste condizioni per mezzo delle formole seguenti

$$tan.\ \psi = \frac{p.\ B}{M'.C + M.G},\quad F = \frac{sen\ \psi}{S}(M'.C + M.G).$$

Nelle quali $\psi$ rappresenta l'angolo che, movendosi la bilancia, fa l'ago colla verticale; $p$ un peso aggiunto ad uno de' piatti; $M'$ il peso della bilancia carica; $M$ il peso del giogo della bilancia; $B$ uno delle braccia; $C$, $G$ le distanze del centro del moto e del centro di gravità del giogo dal punto medio della retta che unisce i punti di sospensione de' due piatti, finalmente $F$ indica la forza con la quale il giogo tende a rimettersi nella situazione dell' equilibrio, ed $S$ il momento d' inerzia della bilancia carica relativamente all' asse del moto.

*Altre maniere e combinazioni di Leve*

1. Nella stadera diviso il braccio più lungo in parti eguali, il marco percorrendo successivamente ciascuna divisione s' equilibrerà con pesi crescenti in progressione aritmetica.

2. Se una potenza equilibra un peso per via di più leve operanti l' una sull' altra sta la potenza al peso, come il prodotto di tutte le braccia di leva poste dalla parte del peso al prodotto della braccia poste dalla parte della potenza.

3. Si diranno le condizioni d' equilibrio di un ponte levatoio, l' estremità del cui tavolato sia congiunta per mezzo d' una catena all' estremo d' una leva di primo genere.

*Dell' Asse nella ruota*

1. Nell' equilibrio dell' asse nella ruota (che agevolmente riducesi alla leva di primo genere) sta la potenza al peso, come il raggio del cilindro a quel della ruota.

2. Se la potenza equilibra il peso mediante un sistema di ruote dentate, starà la potenza al peso, come il prodotto de' raggi de' rocchetti al prodotto de' raggi delle ruote.

3. Allorchè movendosi il peso fa girare il sistema, determineremo i giri che farà l' ultima ruota, alla quale è applicata la potenza, nel tempo in cui compie il suo giro la prima, al cui rocchetto è applicato il peso.

4. Accenneremo la soluzione di quest' altro problema: In un dato sistema di ruote dentate fissare il numero de' denti delle ruote e delle pinne de' rocchetti, in modo che i giri contemporanei fatti dalle ruote estreme siano in un dato rapporto.

*Della Troclea e della Taglia*

1. Se la troclea è fissa riducesi ad una leva di primo genere di braccia uguali. Nella troclea mobile in equilibrio i due tratti della fune declinano egualmente dalla verticale; e sta la potenza al peso, come il raggio al doppio coseno di questa declinazione, ovvero come il raggio della troclea alla corda dell' arco abbracciato dalla fune. Si dimostrerà questa proposizione per mezzo dei principî che servono a determinare le condizioni

dell' equilibrio del poligono funiculare, e riguardando la troclea mobile come una leva di primo genere.

2. La troclea mobile giova alla potenza sinchè l' angolo di declinazione è minor di $60°$: al di là di questo termine è svantaggiosa. Se i due tratti della fune son paralleli, la potenza è la metà del peso; e questo è il maggior vantaggio che può dar questa macchina.

3. Nella taglia in equilibrio la potenza sta al peso, come il raggio alla somma de' coseni delle declinazioni dei tratti delle funi che sostengono le troclee mobili, dalla verticale. Però se le funi son parallele, la potenza sta al peso come l' unità al numero de' tratti di fune che tirano la taglia mobile: la qual disposizione è la più vantaggiosa.

4. In un sistema di troclee mobili collocate l' una sull' altra sta la potenza al peso, come il prodotto de' raggi delle troclee al prodotto delle corde degli archi abbracciati dalla fune in ciascuna troclea. Quindi essendo parallele tutte le funi ( ed in questa disposizione trovasi il massimo vantaggio) sta la potenza al peso, come $1 : 2^n$, $n$ dinota il numero delle troclee.

5. Se più taglie disposte l' una sull' altra operino insieme, essendo alla prima applicata la potenza ed all' ultima il peso; il rapporto della potenza al peso si compone de' rapporti corrispondenti a ciascuna taglia.

*Del Piano inclinato*

1. In questa macchina per ottener l' equilibrio il rapporto della potenza al peso deve uguagliarsi a quello del coseno dell' inclinazione del piano alla verticale, al coseno dell' inclinazione della potenza allo stesso piano ; in questa seconda disposizione trovasi il massimo vantaggio.

2. Mostreremo come riducasi alla leva il piano inclinato.

*Della Vite e del Cuneo*

1. Nella vite in equilibrio sta la potenza al peso, come il passo dell' elice alla periferia che la potenza tende a descrivere. Da ciò risulta potersi questa macchina riguardar come composta dalla leva di secondo genere, e dal piano inclinato.

2. Nell' equilibrio della vite perpetua sta la potenza al peso, come il prodotto del raggio del cilindro pel passo dell' elice, al prodotto del raggio della ruota per la periferia, che la potenza tende a descrivere.

3. La potenza operando normalmente sulla testa d' un cuneo sta alla pressione, che essa esercita perpendicolarmente su ciascun lato del cuneo, come sta la testa del medesimo cuneo a quel lato.